Om Loven for Ændringer i de principale Axers Stilling.

Af

Adolph Steen.

Skjønt Theorien af Inertimomenter er meget smukt afrundet, især efter Poinsots Behandling deraf, synes dog Spørgsmaalet om, hvorledes de principale Axers Stilling varierer, naar det Punkt, hvortil de høre, fjerner sig fra Tyngdepunktet, ikke særlig at være behandlet. Det er vistnok for saavidt overflødigt, som Centralellipsoidens Axer for hvert Punkt falder sammen dermed; men der gives dog en anden smuk og simpel Lov for denne Variation, som fortjener at mærkes. Samtidig med denne Lov opstaar der desuden en ny Regel for Bestemmelsen af Inertimomentets Størrelse for alle Axer igjennem et Punkt i given Afstand fra Tyngdepunktet, idet man blot behøver til Massen Gange denne Afstands Kvadrat at føje en vis let bestemmelig Størrelse. Begge Dele gjøres tilmed anskuelige ved meget simple geometriske Betragtninger.

1. De principale Axer igjennem Tyngdepunktet G af Massen M betegnes ved GA, GB, GC og de tilsvarende Inertimomenter ved A, B, C. Man har da med Hensyn til en hvilkensomhelst Axe GH under Vinklerne α, β, γ med de principale Axer følgende Inertimoment

$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

Vil man bestemme Inertimomentet U med Hensyn til Axen OH' parallel med GH igjennem et Punkt O, der i Afstanden $GO = r$ fra Tyngdepunktet ligger paa en ret Linie, som danner Vinklerne λ, μ, ν med GA, GB, GC, samt Vinklen θ med GH, saa har man dertil følgende Ligninger:

$$U = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + Mr^2\sin^2\theta, \quad (1)$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (2)$$
$$\cos\theta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma. \quad (3)$$

2. Er nu $\lambda = 0$, $\mu = \nu = \frac{\pi}{2}$, bliver

$$\cos\theta = \cos\alpha, \quad \sin^2\theta = \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

altsaa

$$U = A\cos^2\alpha + (B + Mr^2)\cos^2\beta + (C + Mr^2)\cos^2\gamma.$$

Da OH i dette Tilfælde danner Vinklerne α, β, γ med OA, $OB' \neq OB$, $OC' \neq OC$, saa ere de tre principale Inertimomenter for et Punkt O i den til Inertimomentet A svarende Axe igjennem Tyngdepunktet

$$A, \quad A + Mr^2, \quad C + Mr^2$$

og de tilsvarende principale Axer ere OA, OB' og OC'.

2. Har man dernæst $\nu = \frac{\pi}{2}$, $\lambda + \mu = \frac{\pi}{2}$, faar man

$$U = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$+ Mr^2(1 - (\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\cos\beta)^2).$$

Da α, β, γ ere Vinklerne imellem OH' og OA', OB', OC', parallele med henholdsvis GA, GB, GC, saa viser det foregaaende Udtryk, der kun indeholder $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ og $\cos\alpha\cos\beta$, at Axen GC' er en principal Axe og at det tilsvarende principale Inertimoment er

$$C' = C + Mr^2.$$

For at finde de andre i Planen AGB liggende principale Axer, sætter man $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, hvorved

$$U = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + Mr^2(1 - (\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha)^2)$$

eller

$$U - Mr^2 = (A - Mr^2 \cos^2 \lambda) \cos^2 \alpha +$$
$$(B - Mr^2 \sin^2 \lambda) \sin^2 \alpha - 2Mr^2 \sin \lambda \cos \lambda \sin \alpha \cos \alpha.$$

Indfører man dernæst, idet U altid er større end Mr^2,

$$U - Mr^2 = \frac{M}{R^2}, \quad \cos \alpha = \frac{X}{R} = X \sqrt{\frac{U - Mr^2}{M}},$$
$$\sin \alpha = \frac{Y}{R} = Y \sqrt{\frac{U - Mr^2}{M}},$$

faar man

$$(A - Mr^2 \cos^2 \lambda) X^2 + (B - Mr^2 \sin^2 \lambda) Y^2 - 2Mr^2 \sin \lambda \cos \lambda XY = M,$$

tilhørende en krum Linie af anden Orden med Centrum i O og Axerne paa Punktets to principale Axer i Planen AGB, medens Koordinataxerne ere OA' og OB'. Man finder da Inertimomentet U for en Axe igjennem O ved at lægge Størrelsen Mr^2, hvormed Inertimomentet voxer ved Overgang fra en Axe igjennem Tyngdepunktet til en dermed parallel Axe i Afstanden r derfra, til Massen Gange det omvendte af Kvadratet paa den Radius vektor til Kurven, der falder paa Axen.

Beliggenheden af de principale Axer i AGB studeres bedst, naar man indfører Omdrejningsradierne k_a og k_b for Intermomenterne A og B, altsaa

$$A = Mk_a^2, \quad B = Mk_b^2.$$

Derved bliver den sidste Ligning til

$$(k_a^2 - r^2 \cos^2 \lambda) X^2 + (k_b^2 - r^2 \sin^2 \lambda) Y^2 - 2r^2 \sin \lambda \cos \lambda XY = 1. \quad (4)$$

Kun for $\lambda = 0$ og $\lambda = \frac{\pi}{2}$ falde Axerne til den ved (4) bestemte Kurve i samme Retning, som Tyngdepunktets principale Axe, overensstemmende med 2.

Eftersom $(k_a^2 - r^2 \cos^2 \lambda)(k_b^2 - r^2 \sin^2 \lambda) \gtreqless r^4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda$

eller $k_a^2 k_b^2 \gtreqless r^2 (k_b^2 \cos^2 \lambda + k_a^2 \sin^2 \lambda)$,

vil (4) tilhøre henholdsvis en Ellipse, to parallele rette Linier eller en Hyperbel. Da dernæst

$$r^2 = \frac{k_a^2 k_b^2}{k_b^2 \cos^2 \lambda + k_a^2 \sin^2 \lambda} \tag{5}$$

er Ligningen for en Ellipse i Planen AGB med Halvaxerne k_a og k_b, saa vil den foregaaende Betingelse føre til følgende Sætninger angaaende Punkter i AGB.

Et Punkt indenfor den Ellipse, hvis Halvaxer ere de to Omdreiningsaxer til Tyngdepunktets principale Inertimomenter for Axer i samme Plan, har sine principale Axer paa Axerne af den ved (4) bestemte Ellipse.

Et Punkt paa den nævnte Ellipse har sine principale Axer paa Axerne af de ved (4) bestemte parallele rette Linier.

Et Punkt udenfor den samme Ellipse har sine principale Axer paa Axerne af den ved (4) bestemte Hyperbel.

Stillingen af disse og de tilsvarende Inertimomenter findes ved bekjendte Formler. Ere ω og $\frac{\pi}{2} + \omega$ de to Vinkler som Axerne i den ved (4) bestemte Ellipse eller Hyperbel danner med OA', saa har man

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{r^2 \sin 2\lambda}{k_b^2 - k_a^2 + r^2 \cos 2\lambda}.$$

Fremdeles er det omvendte af Halvaxernes Kvadrater

$$\tfrac{1}{2}\left(k_a^2 + k_b^2 - r^2 \pm \sqrt{(k_a^2 + k_b^2 - r^2 \cos 2\lambda)^2 + r^4 \sin^2 2\lambda}\right),$$

saa at de to principale Inertimomenter blive

$$\tfrac{1}{2} M\left(k_a^2 + k_b^2 + r^2 \pm \sqrt{(k_a^2 + k_b^2 - r^2 \cos 2\lambda)^2 + r^4 \sin^2 2\lambda}\right),$$

det øverste Fortegn gjældende Axen under Vinklen ω med OA', det nederste hørende til den Axe, hvis Vinkel er $\frac{\pi}{2} + \omega$.

Ved Systemet af to parallele Linier ere Axerne Linien igjennem O parallel med dem og den derpaa vinkelrette Linie igjennem O. Da (4) i dette Tilfælde formedelst (5) ændres til

$$(\sqrt{k_a^2 - r^2 \cos^2 \lambda}\, X - \sqrt{k_a^2 - r^2 \sin^2 \lambda}\, Y)^2 = 1$$

eller

$$(k_a^2 \sin \lambda\, X - k_b^2 \cos \lambda\, Y)^2 = k_b^2 \cos^2 \lambda + k_a^2 \sin^2 \lambda, \qquad (6)$$

saa har man Vinklen ω imellem den uendelig lange Axe og OA' bestemt ved

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{k_a^2}{k_b^2} \operatorname{tg} \lambda$$

eller

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \omega \right) = - \frac{k_b^2}{k_a^2}.$$

Men heri er λ Vinklen, som Radius vektor paa GO til den til (5) svarende Ellipse danner med Retningen af Axen k_a, altsaa er $\frac{\pi}{2} + \omega$ Vinklen, som samme Ellipses Tangent til Punktet O danner med k_a's Retning. Heraf følger, at de to principale Axer for et Punkt paa den ved (5) bestemte Ellipse falde paa denne Ellipses Tangent og Normal og at de to parallele Linier, hvortil Radii vektores fra O bestemme Inertimomenterne, falde parallele med Normalen.

I Følge heraf bliver det Inertimoment, som svarer til Axen normalt paa Ellipsen, til

$$Mr^2 = M \frac{k_a^2 k_b^2}{k_b^2 \cos^2 \lambda + k_a^2 \sin^2 \lambda}.$$

For at finde det Inertimoment, der svarer til den paa Ellipsens Tangent liggende Axe, bemærkes, at det omvendte af den lille Halvaxes Kvadrat i den til to parallele Linier reducerede Ellipse er

$$k_a^2 + k_b^2 - r^2,$$

altsaa Inertimomentet

$$M(k_a^2 + k_b + r^2)$$

eller

$$M\left(k_a^2 + k_b^2 + \frac{k_a^2 k_b^2}{k_a^2 \cos^2 \lambda + k_b^2 \sin^2 \lambda}\right).$$

4. I det almindelige Tilfælde, hvor O ikke har nogen af de angivne særlige Stillinger, give (1), (2) og (3)

$$U = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$+ Mr^2(1 - (\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)^2).$$

Heraf danner man Ligningen for en tilsvarende Flade af anden Orden med O til Centrum ved at sætte

$$\frac{U - Mr^2}{M} = \frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\alpha}{X^2} = \frac{\cos^2\beta}{Y^2} = \frac{\cos^2\gamma}{Z^2}$$

samt $$A = Mk_a^2, \quad B = Mk_b^2, \quad C = Mk_c^2.$$

Man faar da

$$(k_a^2 - r^2\cos^2\lambda)X^2 + (k_b^2 - r^2\cos^2\mu)Y^2 + (k_c^2 - r^2\cos^2\nu)Z^2$$
$$-2r^2(\cos\mu\cos\nu\,.\,YZ + \cos\nu\cos\lambda\,.\,ZX + \cos\lambda\cos\mu\,.\,XY) + 1 = 0.$$

Inertimomentet svarende til en Axe gjennem O er nu Summen af Mr^2 og Massen Gange det omvendte af Kvadratet paa den Radius vektor til Fladen, der falder paa Axen. De tre principale Inertimomenter bestemmes altsaa i Størrelse og deres tilsvarende Axer i Beliggenhed ved Fladens Halvaxers Størrelse og Retning.

Kvadraterne paa det omvendte af Halvaxerne findes som bekjendt ved Ligningen af tredie Grad

$$\begin{vmatrix} s + r^2\cos^2\lambda - k_a^2, & -r^2\cos\lambda\cos\mu, & -r^2\cos\nu\cos\lambda \\ -r^2\cos\lambda\cos\mu, & s + r^2\cos^2\mu - k_b^2, & -r^2\cos\mu\cos\nu \\ -r^2\cos\nu\cos\lambda, & -r^2\cos\mu\cos\nu, & s + r^2\cos^2\nu - k_c^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

der har tre reelle Rødder, hvis Fortegn variere med r's Størrelse. Naar s antages bekjendt i Følge (7), har man til Bestemmelse af de principale Axers Vinkler a, b, c med Axerne

$$\left.\begin{aligned} (s + r^2\cos^2\lambda - k_a^2)\cos a - r^2\cos\lambda\cos\mu\cos b - r^2\cos\nu\cos\lambda\cos c = 0, \\ -r^2\cos\lambda\cos\mu\cos a + (s + r^2\cos^2\mu - k_b^2)\cos b - r^2\cos\mu\cos\nu\cos c = 0, \\ -r^2\cos\nu\cos\lambda\cos a - r^2\cos\mu\cos\nu\cos b + (s^2 + r^2\cos^2\nu - k_c^2)\cos c = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Af de to første (8) udledes

$$= \frac{\cos a}{r^2 \cos\nu \cos\lambda \begin{vmatrix} -r^2\cos\mu & -1 \\ s + r^2\cos^2\mu - k_b^2 & -\cos\mu \end{vmatrix}} = \frac{\cos b}{r^2 \cos\mu \cos\nu \begin{vmatrix} -\cos\lambda & s + r^2\cos^2\lambda - k_a^2 \\ -1 & -r^2\cos\lambda \end{vmatrix}}$$

eller

$$\frac{\cos a}{(s - k_b^2)\cos\lambda} = \frac{\cos b}{(s - k_a^2)\cos\mu}.$$

Da de to andre Kombinationer af to af Ligningerne (8) give lignende Resultater, faar man

$$\frac{\cos a}{\dfrac{\cos\lambda}{s - k_a^2}} = \frac{\cos b}{\dfrac{\cos\mu}{s - k_b^2}} = \frac{\cos c}{\dfrac{\cos\nu}{s - k_c^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\lambda}{(s - k_a^2)^2} + \dfrac{\cos^2\mu}{(s - k_b^2)^2} + \dfrac{\cos^2\nu}{(s - k_c^2)^2}}}.$$

Ordnes (7), fremkommer der efter nogle temmelig simple Reduktioner

$$\left.\begin{array}{c} s^3 - (k_a^2 + k_a^2 + k_c^2 - r^2)\, s^2 + \\ \left[k_a^2 k_b^2 + k_c k_a^2 + k_b^2 k_c^2 \right. \\ \left. - r^2 (k_a^2 (\cos^2\mu + \cos^2\nu) + k_b^2 (\cos^2\nu + \cos^2\lambda) + k_c^2 (\cos^2\lambda + \cos^2\mu))\right] s \\ + r^2 (k_a^2 k_b^2 \cos^2\nu + k_c^2 k_a \cos^2 u + k_b^2 k_c^2 \cos^2\lambda) - k_a^2 k_b^2 k_c^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Det sidste Led heri skifter Fortegn, naar

$$r^2 = \frac{k_a^2 k_b^2 k_c^2}{k_a^2 k_b^2 \cos^2\nu + k_c^2 k_a^2 \cos^2\mu + k_b^2 k_c^2 \cos^2\lambda} = K_1^2$$

eller

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\lambda}{k_a^2} + \frac{\cos\mu}{k_b^2} + \frac{\cos\nu}{k_c^2}, \tag{9}$$

det vil sige, naar Punktet O passerer Ellipsoiden om G som Centrum med Halvaxerne k_a, k_b, k_c. Men saalænge O ikke har overskredet denne Grændse, forbliver af Koefficienterne til s^2 og s den første negativ, den anden positiv; thi

$$\sqrt{k_a^2 + k_b^2 + k_c^2}$$

er Diagonal i Parallelepipedet med Kanterne k_a, k_b, k_c, altsaa større end alle Ellipsoidens Radier, og Koefficienten til s bliver, for enhver af disse sat istedenfor r, i Følge (9) omskrevet til

$$k_a^2 k_b^2 + k_c^2 k_a^2 + k_b^2 k_c^2 - r^2 \left[k_a^2 k_b^2 \left(\frac{\cos^2 \mu}{k_b^2} + \frac{\cos \lambda}{k_a^2} \right) \right.$$
$$\left. + k_c^2 k_a^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda}{k_a^2} + \frac{\cos \nu}{k_c^2} \right) + k_b^2 k_c^2 \left(\frac{\cos^2 \nu}{k_c^2} + \frac{\cos^2 \mu}{k_b^2} \right) \right]$$
$$= k_a^2 k_b^2 + k_c^2 k_a^2 + k_b^2 k_c^2 - r^2 \left[k_a^2 k_b^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\cos^2 \nu}{k_c^2} \right) \right.$$
$$\left. + k_c^2 k_a^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\cos^2 \mu}{k_b^2} \right) + k_b^2 k_c^2 \left(\frac{1}{{}^2} - \frac{\cos^2 \lambda}{k_a^2} \right) \right]$$
$$= r^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda}{k_a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{k_b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{k_c^2} \right) = r^4 > 0.$$

Koefficienten til s skifter Tegn, naar O passerer en Flade med Ligningen

$$r^2 = \frac{k_a^2 k_b^2 + k_c^2 k_a^2 + k_b^2 k_c^2}{k_a^2 (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + k_b^2 (\cos^2 \nu + \cos^2 \lambda) + k_c^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu)} = K_2^2,$$

men dette sker, inden O passerer Kuglefladen bestemt ved

$$r^2 = k_a^2 + k_b^2 + k_c^2 = K_3^2,$$

hvorved Koefficienten til s^2 skifter Tegn; thi denne Kugles Radius indsat for r i Koefficienten til s gjør denne negativ, nemlig til

$$k_a^2 k_b^2 + k_c^2 k_a^2 + k_b^2 k_c^2 - (k_a^2 + k_b^2 + k_c^2)$$
$$[k_a^2 (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + k_b^2 (\cos^2 \nu + \cos^2 \lambda) + k_c^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu)]$$
$$= - (k_a^4 + k_b^4 + 2k_a^2 k_b^2) \cos^2 \nu - (k_c^4 + k_a^4 + 2k_c^2 k_a^2) \cos^2 \mu$$
$$- (k_b^4 + k_c^4 + 2k_b^2 k_c^2) \cos^2 \lambda < 0.$$

Naar nu r i Ligningen i s varierer fra nul til uendelig, saa skifte de tre sidste Led Fortegn, men det vil kun være det sidste Leds Forandring, som faar Indflydelse paa Bestemmelsen af Røddernes Beskaffenhed, thi de to andre Led ligge, idet de skifte, imellem to Led med forskjellige Tegn. Man faar derfor kun følgende tre Tilfælde, som Tavlen viser.

Punktet O	Fortegnsfølgen	Rødderne	Fladen
$r < K_1$	$+ - + -$	3 pos.	Ellipsoide
$r = K_1$	$+ - + 0$	2 pos. og 0	elliptisk Cylinder
$r > K_1$	$\left\{\begin{matrix} + - + + \\ + - 0 + \\ + - - + \\ + 0 + + \\ + + - + \end{matrix}\right\}$	2 pos. og 1 neg.	elliptisk Hyperboloide

I det andet af disse Tilfælde vil den Axe, for hvilken $s = 0$, falde i den Retning, som bestemmes af

$$\frac{\cos a}{-\frac{\cos \lambda}{k_a^2}} = \frac{\cos b}{-\frac{\cos \mu}{k_b^2}} = \frac{\cos c}{-\frac{\cos \nu}{k_c^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \lambda}{k_a^4} + \frac{\cos^2 \mu}{k_b^4} + \frac{\cos^2 \nu}{k_c^4}}}.$$

Men denne Retning er tillige Normalens til den ved (9) bestemte Ellipsoide, som i retvinklede Koordinater har Ligningen

$$\frac{x^2}{k_a^2} + \frac{y^2}{k_b^2} + \frac{z^2}{k_c^2} = 1,$$

idet man for coss. af Normalens Vinkler faar lignende Udtryk blot forskjellige i Fortegn og med x, y, z for $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, men man har ogsaa $x = r \cos \lambda$, $y = r \cos \mu$, $z = r \cos \nu$. De andre principale Axer for et Punkt paa den nævnte Ellipsoide falde altsaa i dens Tangentplan. Det til Normalen svarende Inertimoment bliver

$$M \cdot \frac{k_a^2 \, k_b^2 \, k_c^2}{k_a^2 \, k_b^2 \cos^2 \nu + k_c^2 \, k_a^2 \cos^2 \mu + k_b^2 \, k_c^2 \cos^2 \lambda}.$$

$\nu = \frac{\pi}{2}$ og $\lambda + \mu = \frac{\pi}{2}$ frembringer atter de i 3 fundne Resultater.

Af det udviklede uddrages følgende almindelige Slutninger.

Et Punkt indenfor den Ellipsoide, hvis tre Halvaxer ere Omdrejningsaxerne til Tyngdepunktets principale Inertimomenter, har sine principale Axer paa Axerne af en Ellipsoide med Centrum i Punktet.

Et Punkt paa den nævnte Ellipsoide har en principal Axe paa Ellipsoidens Normal og de to andre paa Tangentplanen dertil, saaledes at de blive Axer i en elliptisk Cylinder med Normalen til Axe.

Et Punkt udenfor den nævnte Ellipsoide har sine principale Axer paa Axerne af en elliptisk Hyperboloide med Punktet til Centrum.

Et Punkt i Afstanden r fra Tyngdepunktet har Inertimomentet med Hensyn til en hvilkensomhelst Axe udtrykt ved Summen af Mr^2 og M Gange det omvendte af Kvadratet paa Radius vektor til den Flade, som i de tre anførte Tilfælde ligger om Punktet som Centrum. Naar altsaa denne Radius vektor er uendelig, saa reduceres Inertimomentet til Mr^2, og naar den er imaginær, bliver det mindre end Mr^2; men derved erindres, at r varierer med Beliggenheden af det Punkt, hvorigjennem Axerne gaa.